

Teme Supliment Gazeta Matematică

clasa a VII-a

(2012 – 2016)



<i>Prefață</i>	7
<i>Cuvânt-înainte</i>	8
PARTEA I – ARITMETICĂ. TEORIA NUMERELOR	9
Capitolul I.1. NUMERE ÎNTREGI	11
I.1.1. OPERAȚII. MODUL	11
I.1.2. DIVIZIBILITATE. ECUAȚII ÎN \mathbb{Z}	11
I.1.3. CONGRUENȚE. ECUAȚII DIOFANTICE	14
Capitolul I.2. NUMERE RAȚIONALE	16
I.2.1. FRAȚII ORDINARE ȘI FRAȚII ZECIMALE	16
I.2.2. OPERAȚII	16
I.2.3. PROPORȚIONALITATE	18
PARTEA a II-a – ALGEBRĂ	19
Capitolul II.1. NUMERE REALE	21
II.1.1. NUMERE RAȚIONALE. NUMERE IRAȚIONALE	21
II.1.2. CALCUL CU RADICALI	23
II.1.3. MODULUL UNUI NUMĂR REAL	25
II.1.4. PARTEA ÎNTREAGĂ ȘI PARTEA FRAȚIONARĂ	25
Capitolul II.2. CALCUL ALGEBRIC	26
II.2.1. FORMULE DE CALCUL PRESCURTAT	26
II.2.2. IDENTITĂȚI	26
II.2.3. DESCOMPUNERI ÎN FACTORI	27
II.2.4. INEGALITĂȚI	28
Capitolul II.3. ELEMENTE DE ORGANIZARE ȘI PRELUCRARE DATELOR	31
II.3.1. PROBLEME DE MAXIM ȘI MINIM	31
PARTEA a III-a – GEOMETRIE	33
Capitolul III.1. TRIUNGHIUL	35
III.1.1. CALCULUL MĂSURILOR UNOR UNGHIIURI. COLINIARITATE	35
III.1.2. LINII IMPORTANTE. CONCURENȚĂ	38
III.1.3. INEGALITĂȚI GEOMETRICE	39
Capitolul III.2. PATRULATERE	41
III.2.1. PARALELOGRAMUL. PARALELOGRAME PARTICULARE	41
III.2.2. TRAPEZUL	43
Capitolul III.3. ASEMĂNAREA TRIUNGHIURILOR	47
III.3.1. TEOREMA LUI THALES	47
III.3.2. CRITERII DE ASEMĂNARE A TRIUNGHIURILOR	47
III.3.3. TEOREMA LUI MENELAUS. TEOREMA LUI CEVA	49
Capitolul III.4. RELAȚII METRICE	51
III.4.1. REZOLVAREA TRIUNGHIULUI DREPTUNGHIC	51
III.4.2. ELEMENTE DE TRIGONOMETRIE	53
III.4.3. ARII	53
III.4.4. TEOREMA SINUSULUI ȘI TEOREMA COSINUSULUI	56

Capitolul III.5. CERCUL	57
III.5.1. UNGHIURI ȘI ARCE	57
III.5.2. PROBLEME DE TANGENȚĂ	57
III.5.3. PATRULATERUL INSCRIPTIBIL/CIRCUMSCRIPTIBIL	57
PARTEA a IV-a – COMBINATORICĂ	59
Capitolul IV.1. METODE DE NUMĂRARE	61
IV.1.1. COMBINATORICA MULȚIMILOR	61
IV.1.2. PROBLEME DIVERSE	61
Capitolul IV.2. PRINCIPIUL CUTIEI	62
Capitolul IV.3. INVARIANTI	63
IV.3.1. PRINCIPIUL PARITĂȚII	63
IV.3.2. PROBLEME DIVERSE	63
INDICAȚII ȘI SOLUȚII	65
INDEX	154

PARTEA I

**ARITMETICĂ
TEORIA NUMERELOR**

1.1.1. OPERAȚII. MODUL

1. Calculați $|x - 1| + |x - 2| + \dots + |x - 2010|$, știind că $1005 \leq x \leq 1006$.
Argentina Dobrescu, Câmpulung Muscel (S:E12.361)
2. Aflați numerele întregi x, y pentru care $||x - 3| + |y - 2x|| = 3$.
***** (S:E13.310)**
3. Calculați media aritmetică a numerelor: $A = (-1)^0 \cdot 1 + (-1)^1 \cdot 2 + (-1)^2 \cdot 3 + \dots + (-1)^{2013} \cdot 2014 + (-1)^{2014} \cdot 2015$ și $B = 1 + 2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{10}$.
Vasile Uleanu, Curtea de Argeș (S:E14.261)
4. Demonstrați că numărul $a = 2 \cdot 6 \cdot 10 \cdot 14 \cdot \dots \cdot 2014$ se scrie ca produs de 504 numere naturale consecutive.
Laura Vucan și Gheorghe Molea, Curtea de Argeș (S:E14.262)
5. Se dau numerele: $a = \sqrt{3} + \sqrt{3^2} + \sqrt{3^3} + \dots + \sqrt{3^{2016}}$, $b = 3 + 3^2 + 3^3 + \dots + 3^{2016}$,
 $c = \frac{b \cdot \sqrt{3} + 1}{a \cdot \sqrt{3}} - 1$. Arătați că c este pătrat perfect.
Luca Tuță, Buzău (S:E15.144)

1.1.2. DIVIZIBILITATE. ECUAȚII ÎN \mathbb{Z}

1. Pentru n număr natural construim numerele $a = 2n + 1$, $b = 3n + 2$, $c = 4n + 3$.
Demonstrați că $\frac{[a,b] + [b,c]}{2}$ este pătrat perfect, cel puțin egal cu 4. (Am notat $[x, y]$ cel mai mic multiplu comun al numerelor x și y).
Argentina Dobrescu, Câmpulung Muscel (S:E12.364)
2. În luna ianuarie 2011 salariul unei persoane era de 2700 lei. În cursul anului ea beneficiază de o singură majorare salarială de 20%. Stabiliți în care lună a anului se aplică această majorare salarială, știind că venitul salarial pe anul 2011 a fost de 35100 lei.
Marian Teler, Costești, Argeș (S:E12.407)
3. La 1.01.2012 două persoane au salariul lunar de 2700 lei, respectiv 2600 lei. Pe parcursul anului, prima persoană beneficiază de o mărire de salariu de 20%, iar cea de-a doua de o mărire de 15%. Stabiliți în ce luni ale anului se aplică aceste majorări, astfel încât veniturile lor pe anul 2012 să fie egale.
Marian Teler, Costești, Argeș (S:E12.410)
4. Determinați cel puțin două valori ale numărului rațional pozitiv n pentru care $\sqrt{115n + 23}$ este număr rațional.
Viorel Alb, Moisei, Maramureș (S:E12.441)

5. Demonstrați că, pentru orice n număr natural, este adevărată relația: $\sqrt{2^n + 7} + \sqrt{3^n + 10} + \sqrt{7^n + 3} \notin \mathbb{N}$.

Bogdan Zetea, Sighetu Marmăției (S:E12.442)

6. Arătați că numărul $A = (a + 259)^{2012} - (a + 111)^{2012}$ se divide cu 37, pentru orice a număr natural.

Elisabeta Stanciu și Daniel Stanciu, Beclean, Bistrița-Năsăud (S:E12.485)

7. Dacă x, y, z sunt numere întregi cu proprietatea că $2x - 3y - 10z = 0$, demonstrați că $y(x + z)(x + y)$ este un multiplu de 30.

Nazeli Boicescu, Brăila (S:E12.561)

8. a) Scrieți numărul 504 ca sumă de trei numere consecutive și ca produs de trei numere consecutive.

b) Arătați că dacă un număr natural nenul poate fi scris ca produs de trei numere consecutive, atunci el poate fi scris și ca sumă de trei numere consecutive.

Constantin Apostol, Rm. Sărat (S:E12.563)

9. Aflați cardinalul mulțimii: $A = \left\{ x \in \mathbb{Z} \mid x = \frac{n^2 + 21n}{n - 1}, n \in \mathbb{N}, n \neq 1 \right\}$.

Nicolae Ivașchescu, Craiova (S:E12.568)

10. Determinați elementele mulțimii: $M = \left\{ x \in \mathbb{N} \mid x = \frac{n^4 - 3}{n^2 - 3}, n \in \mathbb{N} \right\}$.

Dumitru Săvulescu, București (S:E12.570)

11. Fie numărul $A = \frac{1}{9}n^2(n^2 - 1)^2(3n^2 + n - 2) + 4$, unde n este număr natural nenul.

Arătați că numărul A este multiplu de 4.

Vasile Tarciniu, Odobești, Vrancea (S:E12.689)

12. Determinați numerele naturale n pentru care $n + 2$ este cel mai mare divizor comun al numerelor $5n + 13$ și $4n + 11$.

Nicolae Secelean, Sibiu (S:E12.690)

13. Arătați că $\sqrt{2008^{2009} + 2009^{2010} + 2010^{2011} + 2011^{2012} + 2012^{2013}}$ este număr irațional.

Anca Mihiș, Baia Mare (S:E13.21)

14. Fie numerele întregi a, b, c , astfel încât $20a - 7c = 15b$. Arătați că produsul $(a + b) \cdot c$ este divizibil cu 35.

Maria Petrescu, București (S:E13.106)

15. Suma cifrelor unui număr natural P este 5. Demonstrați că \sqrt{P} este număr irațional.

Victor Nicolae, București (S:E13.190)

16. Arătați că există a un număr natural, astfel încât $A = 5^{3n+a} \cdot 3^{3n+1} + 1$ este divizibil cu 7.

Argentina Dobrescu, Câmpulung Muscel (S:E13.341)

17. Găsiți două numere naturale, știind că diferența pătratelor lor este 1805, iar cel mai mare divizor comun al lor este 19.

Simona Pavel, Câmpulung Muscel (S:E13.342)

18. Arătați că $5^{2013} - 1$ este multiplu de 124.

Argentina Dobrescu, Câmpulung Muscel (S:E13.344)

19. Demonstrați că numărul $A = 3 \cdot 5^{2n+1} + 2^{3n+1}$ este divizibil cu 17, oricare ar fi n număr natural.

Ion Pîrșe, Câmpulung Muscel (S:E13.345)

20. Determinați numerele întregi a și b care verifică relația $a^3 b^3 - 11a^3 + 11b^3 = 2135$.

Cristina Vișdeluc și Mihai Vișdeluc, Baia Mare (S:E13.347)

21. Arătați că numărul $A = 1^p + 2^p + \dots + 2014^p$ este divizibil cu 5, unde p este un număr natural care nu este divizibil cu 4.

George-Florin Șerban, Brăila (S:E14.28)

22. Pentru n număr natural, demonstrați că $(5n^2 + 3)(n^4 + 8) + 2015$ nu este pătrat perfect.

Nicolae Ivășchescu, Craiova (S:E14.144)

23. Vom spune că o mulțime de numere naturale are proprietatea \mathcal{P} dacă, pentru oricare două elemente a, b din mulțime, avem $a - b \mid a + b$. Câte mulțimi cu trei elemente nenule, mai mici sau egale cu 9, au proprietatea \mathcal{P} ?

Liviu Petre, Târgoviște (S:E14.146)

24. Arătați că numărul $\frac{n^3 + 6n^2 + 5n}{6}$ este natural, oricare ar fi n număr natural.

Vasile Scurtu, Bistrița (S:E14.184)

25. Arătați că numărul $a = 2082^{3n} + 30 \cdot 2079^{5n}$ este divizibil cu 31, oricare ar fi n număr natural.

Ion Neață, Slatina (S:E14.187)

26. Determinați mulțimea $M = \left\{ n \in \mathbb{Z} \mid \frac{2n^2 - 3n - 4}{3n^2 - 2} \in \mathbb{Z} \right\}$.

Dan Negulescu, Brăila (S:E14.221)

27. Rezolvați ecuația $x \cdot (x + 1) \cdot (x + 2) \cdot (x + 3) = 1679^{p-1} + 1680^{p-1} + 1681^{p-1}$, unde $x \in \mathbb{N}$ și p este număr prim.

George-Florin Șerban, Brăila (S:E14.225)

28. a) Aflați numerele prime p pentru care $p^2 + 2$ este număr prim.

b) Există numere prime p pentru care $p^4 + 4$ este număr prim? Justificați.

Ovidiu Bobb, Copalnic Mănăstur, Maramureș (S:E14.308)

29. Arătați că nu există numere întregi x și y pentru care $x^2 = 9y + 2$.

Constantin Bolbotină, Băile Herculane (S:E14.342)

30. Rezolvați în mulțimea numerelor întregi ecuația $225x^2 + 30xy + 4y = 327$.

Tudor Mocioi, elev, București (S:E15.25)

31. Determinați numerele naturale a și b pentru care $a(2a - b + 1) = b - 2014$.

Andrei Matei, Turnu Măgurele (S:E15.104)

32. Rezolvați în mulțimea numerelor întregi ecuația $\frac{(x+y-4)(x+y+6)}{xy} - \frac{6}{y} + \frac{8}{x} = \frac{2xy+2x+2y-48}{xy}$.

Raul Bodrogean, elev, București (S:E15.142)

33. Rezolvați în mulțimea numerelor întregi ecuația $x^2y^2 + x^2 + y^2 + 1 = 4xy$.

Victor Săceanu, Drobeta Turnu-Severin (S:E15.143)

34. Rezolvați în mulțimea numerelor întregi ecuația: $5(x-1) + 7(y+3) = 6(x-1)(y+3)$.

Rudi Pasici, Brăila (S:E15.266)

35. Fie a, b, c , numere întregi astfel încât 2015 divide simultan $ab + 6b + 36$ și $bc + 6c + 36$. Demonstrați că 2015 divide $ac + 6a + 36$.

Carmen Botea și Viorel Botea, Brăila (S:E15.270)

36. Rezolvați în mulțimea numerelor întregi ecuația: $\frac{6}{x} + \frac{7}{y} = 3$.

Constantin Apostol, Rm. Sărat (S:E15.342)

37. Fie r restul împărțirii lui $18^{2015} - 17^{2015}$ la 306. Arătați că media aritmetică a numerelor 2015^r și r^{2015} este divizibilă cu 63.

Ion Burcă, Slatina (S:E16.23)

1.1.3. CONGRUENȚE. ECUAȚII DIOFANTICE

1. Determinați numărul \overline{ab} , știind că $3\sqrt{\overline{ab}} = 2(a+b)$.

Matei Andrei, Turnu Măgurele (S:E12.404)

2. Fie n și p numere naturale nenule, p prim, astfel încât $p^4 + 95 = n!$. Determinați n și p . ($n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n$)

Mihai Vijdeluc, Baia Mare (S:E12.565)

3. Determinați toate numerele întregi x cu proprietatea că $\sqrt{x+2012}$ și $\sqrt{x-2012}$ sunt simultan numere naturale.

Neculai Stanciu, Buzău și Titu Zvonaru, Comănești (S:E12.644)

4. Determinați $x, y \in \mathbb{Z}$ pentru care $6x^2 - xy - y^2 = 4$.

Daniela Dicu, Sibiu (S:E12.686)

5. Determinați numerele naturale prime a, b, c , astfel încât $a + \frac{2bc}{b^2 + c^2} = \frac{100}{17}$.

Cristina Vijdeluc și Mihai Vijdeluc, Baia Mare (S:E13.27)

6. Rezolvați în mulțimea numerelor întregi ecuația $x^2 + 4x - 9y^2 - 3 = 0$.

Gheorghe Iacob, Pașcani (S:E13.143)

7. Aflați numerele reale x pentru care $x^3 - 75x^2 + 887x - 2013 = 0$.

Nicolae Ivășchescu, Craiova (S:E13.145)

8. Arătați că egalitatea $10101_{(x)} \cdot 101_{(x)} = 1020201_{(x)}$ este adevărată, oricare ar fi baza de numerație $x > 2$.

Roxana Mărcușanu, Pitești (S:E13.147)

9. Determinați $m \in \mathbb{N}^*$, astfel încât $m^m = m! + 232$, unde $m! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot m$.

Lucian Petrescu, Tulcea (S:E13.181)

10. Determinați $m, n \in \mathbb{Z}$, astfel încât: $7(m+1) = 2014^n - m^2$.

Grigore Dumitru, Măcin (S:E13.182)

11. Aflați numerele întregi x și y pentru care $49x^2 - 7xy + 6y = 23$.

Vasile Chiriac, Bacău (S:E13.225)

12. Arătați că nu există un număr prim $p > 5$ care să reprezinte numărul de diagonale ale unui poligon convex.

Constantin Rusu, Râmnicu Sărat (S:E13.346)

13. Determinați $n \in \mathbb{N}^*$, știind că numărul $A = 5^n + 5^{2014} - 5^{2010} \cdot 481$ este pătrat perfect.

Mihaela Giurcă, Brăila (S:E14.30)

14. Notăm $p(n)$ penultima cifră a lui n . Arătați că $p(\overline{a_1 a_2 \dots a_{n-1} a_n}) = p(\overline{a_{n-1} a_n})$.

**** (S:E14.143)*

15. Fie x, y, z numere întregi care verifică relația $z^2 = x^2 + y^2$. Arătați că $4 \mid x$ sau $4 \mid y$.

Vasile Scurtu, Bistrița (S:E14.145)

16. Determinați numerele naturale x, y, z pentru care $20 \cdot 3^x + 9 \cdot 2^y = 6^z$.

Liviu Petre, Târgoviște (S:E14.182)

17. Determinați numărul perechilor ordonate (a, b) de numere naturale pentru care

numerele $x = \overline{ab}$ și $y = \overline{ba}$ verifică: $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} \in \mathbb{N}$.

Adriana Dragomir, Oțelu Roșu (S:E14.347)

18. Aflați numerele întregi x și y pentru care $2^{x^2-2y} + 2^{y^2-2x} = 1$.

Maranda Linț și Dorin Linț, Deva, Hunedoara (S:E14.349)

19. Fie numerele impare $a_1, a_2, \dots, a_{2015} \in \mathbb{Z}$ și numerele pare $b_1, b_2, \dots, b_{2015} \in \mathbb{Z}$. Arătați

că $\sqrt{a_1^2 + b_1^2 + a_2^2 + b_2^2 + \dots + a_{2015}^2 + b_{2015}^2} \notin \mathbb{Q}$.

Gheorghe Râmbu, Baia Mare (S:E15.225)

20. Arătați că ecuația $x^2 = 2014^y - x + 2015$ nu are soluții în mulțimea numerelor naturale.

Nicolae Ivășchescu, Canada (S:E15.303)

1.2.1. FRAȚII ORDINARE ȘI FRAȚII ZECIMALE

1. Determinați numărul $\overline{0,(abc)}$, știind că zecimala de pe locul 2013 este 5, cea de pe locul 2014 este 2, iar cea de pe locul 2015 este 1.

*** (S:E13.226)

2. Două numere naturale prime impare consecutive se numesc *numere gemene*.

a) Dați exemplu de șase perechi de numere gemene.

b) Dacă a și b sunt două numere naturale gemene diferite de 3, arătați că nu există $n \in \mathbb{N}$ pentru care numerele $2^{2n} + 6^n + 7^n + a$ și $2^{2n} + 6^n + 7^n + b$ să fie gemene.

Artur Bălăucă, Botoșani (S:E13.261)

3. Considerăm numerele $x = a^3 b^5 c^n$ și $y = (-1)^n \cdot \frac{1}{a^7} \cdot b^2$, unde $a, b, c \in \mathbb{Z}^*$ și $n \in \mathbb{N}$.

Determinați semnul produsului xy .

Ioan Ciobănașu, Botoșani (S:E13.262)

4. Considerăm numărul rațional $a = (5^{2013} - 1) \left(\frac{1}{n-3} + \frac{1}{n-2} + \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} \right)$, unde $A = \{x \in \mathbb{Z}; |x| \leq 3\}$ și $n \in \mathbb{Z} \setminus A$. Arătați că numărul a nu este număr întreg.

Artur Bălăucă, Botoșani (S:E13.263)

5. Determinați numerele \overline{xy} cu proprietatea că există p număr prim, astfel încât

$\sqrt{\frac{xy+p}{xy-p}}$ să fie natural.

Romanața Ghiță și Ioan Ghiță, Blaj (S:E14.63)

1.2.2. OPERAȚII

1. Fie x și y numere naturale nenule, astfel încât: $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{2012}$. Arătați că

$$\sqrt{(x-2012)(y-2012)} = 2012.$$

Septimius Voiculeț, Crevenicu, Teleorman (S:E12.409)

2. Arătați că numărul $a = (2 + 4 + 6 + \dots + 2014) \left(\frac{1}{1 \cdot 54} + \frac{1}{54 \cdot 107} + \frac{1}{107 \cdot 160} + \dots + \frac{1}{955 \cdot 1008} \right) \cdot 53$ este pătrat perfect.

Mariana Ciobănașu, Botoșani (S:E13.264)

3. Arătați că:

a) $\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{2013^2} < 2$;

b) $\frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \dots + \frac{1}{2013^2} < 1,5$.

Ioan Ciobănașu și Mariana Ciobănașu, Botoșani (S:E13.265)

4. Știind că $ad + bc = bd$, unde $a, b, c, d \in \mathbb{N}^*$, demonstrați că $\frac{a^{2013}}{b^{2013}} + \frac{a^{2012}c}{b^{2012}d} + \dots + \frac{a^2c}{b^2d} + \frac{ac}{bd} + \frac{c}{d}$ nu depinde de a, b, c, d .

Ligia Isim, Brăila (S:E14.29)

5. Arătați că:

a) $\frac{n}{n+1} - \frac{n-1}{n} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n(n+1)}$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}^*$;

b) $\frac{2013}{1 \cdot 2} + \frac{2012}{2 \cdot 3} + \frac{2011}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{2}{2012 \cdot 2013} + \frac{1}{2013 \cdot 2014} = \frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{3}{4} + \dots + \frac{2013}{2014}$.

Concursul „Micul matematician”, Negrești-Oaș (S:E14.101)

6. Fie numerele: $a = \overline{0,x(y)+0,y(x)}$, $b = \overline{0,xx(y)+0,yy(x)}$, $c = \overline{0,xyx(y)+0,yxy(x)}$, $d = \overline{0,xyyx(y)+0,yxxy(x)}$ și numărul $m = \sqrt{\frac{a+d}{b \cdot c}}$. Aflați x, y cifre diferite nenule, astfel încât $m \in \mathbb{Q}$.

Concursul „Micul matematician”, Negrești-Oaș (S:E14.102)

7. Calculați $[S]$, unde $S = \frac{2}{5} + \frac{1}{5} + \frac{1}{10} + \frac{1}{20} + \dots + \frac{1}{5 \cdot 2^{n-2}}$, $n \in \mathbb{N}^*$, unde $[x]$ este partea întreagă a numărului x .

Nazeli Boicescu, Brăila (S:E14.222)

8. Fie a, b, c, d, x, y, z, t numere reale, astfel încât: $x = bcd + \frac{1}{a}$, $y = acd + \frac{1}{b}$, $z = abd + \frac{1}{c}$, $t = abc + \frac{1}{d}$ și $ax + by + cz + dt = 1$. Calculați $abcd$ și $xyzt$.

Sorin Ulmeanu, Pitești (S:E14.266)

9. a) Arătați că orice fracție de forma $\frac{a^2 + a}{(a^2 + 3a)(a^2 + 3a + 2)}$ este reductibilă și găsiți fracția ireductibilă echivalentă.

b) Calculați suma $S = \frac{2}{4 \cdot 6} + \frac{6}{10 \cdot 12} + \frac{12}{18 \cdot 20} + \dots + \frac{420}{460 \cdot 462}$.

Adrian Țurcanu, Pitești (S:E14.267)

10. Fie numerele reale $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$, astfel încât $x_1 = a_2 \cdot a_3 \cdot \dots \cdot a_n + \frac{1}{a_1}$,
 $x_2 = a_1 \cdot a_3 \cdot \dots \cdot a_n + \frac{1}{a_2}$, ..., $x_n = a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_{n-1} + \frac{1}{a_n}$ și $a_1 \cdot x_1 + a_2 \cdot x_2 + \dots + a_n \cdot x_n =$
 $= n - 1$. Arătați că $x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot \dots \cdot x_n < 0$.

Vasile Scurtu, Bistrița (S:E14.301)

1.2.3. PROPORȚIONALITATE

1. Determinați cel mai mic număr natural nenul n , astfel încât $n, n + 1, n + 2$ să reprezinte lungimile înălțimilor unui triunghi.

Mihai Bodan, Cosmești-Videle (S:E12.405)

2. Înălțimile unui triunghi sunt invers proporționale cu 3, 4 și 5. Aflați aria triunghiului, știind că cea mai mică dintre laturi are lungimea egală cu 6 cm.

*** (S:E12.487)

3. Fie triunghiul ABC cu lungimile laturilor a, b, c , astfel încât $\frac{a}{b + 2014c} = \frac{b}{c + 2014a} =$
 $= \frac{c}{a + 2014b}$. Demonstrați că triunghiul ABC este echilateral.

Alin Mușat, elev, Brăila (S:E14.230)

4. Fie r, p numere reale diferite și a, b, c, d numere reale, astfel încât $\frac{ar + b}{ap + b} = \frac{cr + d}{cp + d}$.

Arătați că $ad = bc$.

*** (S:E15.23)

5. Numerele pozitive a, b, c sunt direct proporționale cu numerele 3, a, b , iar $3b + a^2 = 1800$. Determinați numerele a, b, c și calculați $A = (c - 2a^2 - 4b + 1)^{2012}$.

Veronica Țucă, Alexandria (S:E15.101)

6. Fie a, b, c, d numere naturale nenule cu $(a, b) = 1, (c, d) = 1$ și $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = 1$. Arătați că $\sqrt{a}, \sqrt{b}, \sqrt{c}$ sunt lungimile laturilor unui triunghi dreptunghic. (Am notat (x, y) cel mai mare divizor comun al numerelor x și y .)

Vasile Scurtu, Bistrița (S:E15.145)

7. Aflați numărul \overline{abcd} , știind că $\frac{\overline{ab}}{4} = \frac{\overline{cd}}{3} = \frac{\overline{db}}{10} = \frac{\overline{cb}}{2}$.

George-Florin Șerban, Brăila (S:E15.264)